ARKUSZ 18
MATURA 2010

PRZYKŁADOWY ARKUSZ EGZAMINACYJNY Z MATEMATYKI

POZIOM PODSTAWOWY

Czas pracy: 170 minut

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz zawiera 11 stron.
2. W zadaniach od 1. do 25. są podane 4 odpowiedzi: A, B, C, D, z których tylko jedna jest prawdziwa. Wybierz tylko jedną odpowiedź.
3. Rozwiązania zadań od 26. do 33. zapisz starannie i czytelnie w wyznaczonych miejscach. Przedstaw swój tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora. Błędne zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
7. Obok numeru każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów możliwych do uzyskania.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.

Życzymy powodzenia!

Za rozwiązanie wszystkich zadań można otrzymać łącznie **50 punktów**.

OPERON

Arkusz opracowany przez Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON
na wzór arkuszy opublikowanych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną

ZADANIA ZAMKNIĘTE

W zadaniach od 1. do 25. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi jedną poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (*1 pkt*)

Rozwiązaniem równania $8 - a\sqrt{5} = 3$ jest liczba:

A. 5 **B.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$ **C.** $\sqrt{5}$ **D.** $5\sqrt{5}$

Zadanie 2. (*1 pkt*)

Prosta $y = 2ax + b$ jest równoległa do prostej $y = (a+b)x - a$, gdzie $a \neq 0, b \neq 0$. Wynika stąd, że:

A. $a + b = 0$ **B.** $a - b = 0$ **C.** $\frac{a}{b} = 2$ **D.** $ab = 2$

Zadanie 3. (*1 pkt*)

Okrąg o równaniu $(x-1)^2 + y^2 = r^2$, gdzie $r > 0$, ma z prostą $x = 3$ dwa punkty wspólne. Zatem:

A. $r < 2$ **B.** $r > 2$ **C.** $r = 4$ **D.** $1 < r < 2$

Zadanie 4. (*1 pkt*)

Zbiorem wartości funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = x^2 + bx + c$ jest przedział $\langle -2, \infty)$. Funkcja przyjmuje wartości ujemne dla argumentów należących do przedziału $(-4, 6)$. Wskaż wzór funkcji f.

A. $f(x) = -2(x+4)(x-6)$ **B.** $f(x) = (x+4)(x-6) - 2$
C. $f(x) = (x+4)(x-6) + 23$ **D.** $f(x) = (x-4)(x+6) - 23$

Zadanie 5. (*1 pkt*)

Wyrażenie $\left(a^{-\frac{1}{2}} - 5\right)\left(a^{-\frac{1}{2}} + 5\right)$, dla $a \neq 0$, można zapisać w postaci:

A. $a - 25$ **B.** $a^2 - 25$ **C.** $a^{-1} - 25$ **D.** $a^{-2} - 25$

Zadanie 6. (*1 pkt*)

Funkcja wykładnicza f określona wzorem $f(x) = (2a+3)^x$ jest rosnąca dla:

A. $a > -1$ **B.** $a > -1{,}5$ **C.** $a < -1$ **D.** $-1{,}5 < a < -1$

Zadanie 7. (*1 pkt*)

Wiadomo, że α jest kątem ostrym i $\sin\alpha\cos\alpha = 0,5$. Wynika stąd, że wartość wyrażenia $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha$ jest równa:

A. 1 **B.** 0,5 **C.** 0,25 **D.** 0,75

Zadanie 8. (*1 pkt*)

Ośmiocyfrowe numery telefonów w pewnym mieście są tworzone z cyfr: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, przy czym numery nie mogą zaczynać się od cyfry 9. Ile najwięcej takich numerów telefonicznych można utworzyć?

A. 9^7 **B.** $10^8 \cdot 10^7$ **C.** $8^{10} - 7^{10}$ **D.** $10^8 - 10^7$

Zadanie 9. (*1 pkt*)

$33\frac{1}{3}$% liczby m jest równa wartości wyrażenia $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+2^{-2}-\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$. Liczba m jest więc równa:

A. 3 **B.** 6 **C.** 2 **D.** -30

Zadanie 10. (*1 pkt*)

Najmniejsza wartość wyrażenia $|x|+|x+2|$ jest równa:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** -2

Zadanie 11. (*1 pkt*)

Rozwiązaniem równania $|6-2x|=1$ są liczby:

A. przeciwne **B.** różniące się o 1 **C.** całkowite **D.** niewymierne

Zadanie 12. (*1 pkt*)

Zbiorem wartości funkcji f określonej wzorem:

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{dla } x\in\langle -3,0) \\ -x^2+3 & \text{dla } x\in\langle 0,2) \\ -1 & \text{dla } x\in\langle 2,\infty) \end{cases}$$

jest:

A. $\langle -1,3\rangle$ **B.** $(-\infty,3\rangle$ **C.** $\langle 3,\infty)$ **D.** $\langle -1,\infty)$

Zadanie 13. (*1 pkt*)

Prosta $(2m-4)x+2y+1=0$ jest nachylona do dodatniej półosi osi OX pod kątem $45°$, gdy liczba m jest równa:

A. 2 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** -1 **D.** 1

Zadanie 14. (*1 pkt*)

Pole trójkąta ABC jest cztery razy mniejsze od pola trójkąta EFG. Trójkąty te są podobne. Długość boku AB jest równa 16. Długość boku EF, odpowiadającego bokowi AB, jest równa:

A. 64 **B.** 32 **C.** 4 **D.** 8

Zadanie 15. (*1 pkt*)

Pierwiastkami wielomianu stopnia trzeciego $W(x)$ są liczby: $-3, 1, 4$ i współczynnik liczbowy stojący przy najwyższej potędze zmiennej jest równy 2. Wielomian ten możemy zapisać w postaci:

A. $W(x)=2(x+3)(x+1)(x+4)$ **B.** $W(x)=(2x+3)(2x-1)(2x-4)$
C. $W(x)=(2x+3)(x-1)(x-4)$ **D.** $W(x)=2(x+3)(x-1)(x-4)$

Zadanie 16. (*1 pkt*)

Na trójkącie równobocznym opisano koło, którego pole jest równe 4π. Długość boku tego trójkąta jest równa:

A. $\sqrt{3}$ **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** $4\sqrt{3}$ **D.** 3

Zadanie 17. (*1 pkt*)

W trapezie równoramiennym podstawy są równe 10 i 16, a kąt rozwarty ma miarę $120°$. Obwód trapezu jest równy:

A. 38 **B.** 26 **C.** $26+6\sqrt{3}$ **D.** 32

Zadanie 18. (*1 pkt*)

Pole figury ograniczonej fragmentem wykresu funkcji f danej wzorem $f(x) = x^2 - 4$ i osią OX jest:

A. mniejsze od 8 **B.** większe od 8 **C.** równe 8 **D.** większe od 16

Zadanie 19. (*1 pkt*)

Kosmonauta ma do wyboru dwie identyczne kapsuły ratunkowe. Prawdopodobieństwo, że kapsuła pierwsza spadnie na Ziemię nieuszkodzona jest równe $\frac{1}{2}$. Prawdopodobieństwo, że druga kapsuła spadnie na Ziemię nieuszkodzona jest równe $\frac{2}{5}$. Kosmonauta wybiera losowo kapsułę. Prawdopodobieństwo, że doleci na Ziemię w nieuszkodzonej kapsule jest równe:

A. $\frac{9}{10}$ **B.** $\frac{9}{20}$ **C.** $\frac{2}{10}$ **D.** $\frac{1}{5}$

Zadanie 20. (*1 pkt*)

Objętość kuli jest równa $\frac{1}{6}\pi$. Pole powierzchni tej kuli wyraża się liczbą:

A. wymierną większą od 3 **B.** wymierną mniejszą od 3
C. niewymierną większą od 3 **D.** niewymierną mniejszą od 3

Zadanie 21. (*1 pkt*)

Sześcian i czworościan foremny mają równe długości krawędzi. Stosunek objętości sześcianu do objętości czworościanu jest równy:

A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ **B.** $12\sqrt{2}$ **C.** $6\sqrt{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$

Zadanie 22. (*1 pkt*)

Suma trzech pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa $-3{,}5$. Iloraz tego ciągu jest równy $0{,}5$. Czwarty wyraz tego ciągu jest równy:

A. $0{,}25$ **B.** 1 **C.** $-0{,}25$ **D.** -1

Zadanie 23. (*1 pkt*)

Wskaż równość prawdziwą.

A. $4^{\log_2 5} = 25$ **B.** $2^{1 - \log_2 5} = 5$ **C.** $4^{\log_2 4} = 4$ **D.** $5^{\log_{25} 5} = 5$

Zadanie 24. (*1 pkt*)

Pole równoległoboku jest równe 24. Stosunek jego wysokości jest równy 3 : 4. Długości boków i długości przekątnych wyrażają się liczbami naturalnymi i długość każdej z wysokości jest większa od 5. Boki równoległoboku są równe:

A. 3 i 4 **B.** 6 i 8 **C.** 6 i 4 **D.** 3 i 8

Zadanie 25. (*1 pkt*)

Punkty E, L, K, A leżą na okręgu w podanej kolejności. Cięciwy EK i LA przecinają się w punkcie M. Zatem:

A. $|\angle LMK| = 2|EMA|$ **B.** $|\angle LMK| = 2|\angle LAK|$ **C.** $|\angle LEK| = |\angle LKA|$ **D.** $|\angle KEL| = |\angle LAK|$

ZADANIA OTWARTE

Rozwiązania zadań o numerach od 26. do 33. należy zapisać w wyznaczonych miejscach pod treścią zadania.

Zadanie 26. (*2 pkt*)

Suma drugiego i trzeciego wyrazu ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 0, a różnica trzeciego i czwartego wyrazu tego ciągu jest równa -2. Wyznacz różnicę tego ciągu i jego pierwszy wyraz.

Zadanie 27. (*2 pkt*)

Wykaż, że liczba $a = \log_{2\sqrt{2}} 8 - \log_{\frac{1}{2}} 0{,}25$ nie jest ani liczbą pierwszą, ani złożoną.

Zadanie 28. (*2 pkt*)

Rozwiąż równanie $2\cos\alpha - \sqrt{2} = 0$, gdy $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Zadanie 29. (*2 pkt*)

Wykaż, że liczba $\sqrt{6\sqrt{3} + 12}$ jest większa od 4.

Zadanie 30. (*2 pkt*)

Wiadomo, że $a > 0$ i $\frac{1}{a} + a = 2$. Wykaż, że $a^2 + \frac{1}{a^2} = a + \frac{1}{a}$.

Zadanie 31. (*4 pkt*)

Liczbę przekątnych wielokąta o n bokach można obliczyć ze wzoru $\frac{n(n-3)}{2}$, gdzie $n \geqslant 3, n \in N$. Ile boków ma wielokąt, który ma 35 przekątnych?

Zadanie 32. (*5 pkt*)

Ze zbioru liczb naturalnych spełniających nierówność $\frac{x-3}{2} - \frac{x-1}{3} < 0$ losujemy dwie różne liczby m, p. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: punkt o współrzędnych (m, p) należy do wykresu funkcji $y = x + 4$.

Zadanie 33. (*6 pkt*)

Długości krawędzi prostopadłościanu tworzą ciąg geometryczny. Objętość bryły jest równa 27, a suma długości jej krawędzi jest równa 13. Znajdź długość najkrótszej krawędzi prostopadłościanu.